963. Metric Vector-lattice ニ就テ

中野 秀五郎 (東大)

最近 Metric Vector-lattice ノ表現ガ F. Bohnenblust (Duke Math. Vol. 6, 1940)、ヤ角谷氏 (Annals of Math. Vol. 42. 1941) 等ニヨッテ研究サレテキル。此処デハ relative Spektrum (数物記事. Eine Spektraltheorie) ガ Metric Vector-lattice ニ應用シ得ルコトヲ注意致シマス。

1) Metric Vector-lattice $\mathfrak{M}$ トハ (conditionally) σ-complete ナ Vector-lattice ニシテ、然カモ norm $\|a\|$ ガ次ノ如ク定義サレテキルトスル。

$$\|a\| = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$|a| \leqq |b| \longrightarrow \|a\| \leqq \|b\| \qquad (a, b \in \mathfrak{M})$$

但シ此処デハ norm $\|a\|$ ガ Banach space ノ條件ヲ滿足スルコトハ假定シナイデ單ニ

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\| \qquad (\alpha \text{ real number})$$

ノミヲ假定スル。

先ヅ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル Projector $[p]$ ノ maximal-ideal ヨリナル. locally bicompact Hausdorff space ヲ $\mathfrak{I}$. トシ maximalideal $\mathfrak{p}$ ヲ point ト考ヘル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $$\lim_{[p]\to\mathfrak{p}} \frac{\|[p]\,b\|}{\|[p]\,a\|} = \left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right)$$

但シ $\mathfrak{p}$ ヲ〔a〕トスル。又コノ式ノ意味ハ、任意ノ正数 $\varepsilon>0$ ニ對シ，$\mathfrak{p}$ ノ近傍〔p_0〕ヲ適當ニ定メレバ 〔p〕$\leqq$〔p_0〕ニ對シ常ニ

$$\left|\frac{\|[p]\,b\|}{\|[p]\,a\|}-\left(\frac{|b|}{|a|},\ \mathfrak{p}\right)\right|<\varepsilon$$

ノ意味ナリ。又 $\left(\frac{|b|}{|a|},\mathfrak{p}\right)=+\infty$ ノトキハ，任意ノ正数 γ ニ對シ、$\mathfrak{p}$ ノ適當ナ近傍〔p_0〕ヲ定メレバ、〔p〕$\leqq$〔p_0〕ニ對シ

$$\frac{\|[p]\,b\|}{\|[p]\,a\|}\geqq\gamma$$

トナルノ意デアル。

〔証明〕 $(0<)\left(\frac{|b|}{|a|},\ \mathfrak{p}\right)=\lambda$ ヲ *finite* トスレバ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ、$\mathfrak{p}$ ノ近傍〔p_0〕ヲ適當ニ定メレバ

$$(\lambda-\varepsilon)[p_0]|a|\leqq[p_0]|b|\leqq(\lambda+\varepsilon)[p_0]|a|$$

故ニ〔p〕$\leqq$〔p_0〕ナレバ

$$(\lambda-\varepsilon)[p]|a|\leqq[p]|b|\leqq(\lambda+\varepsilon)[p]|a|$$

從ッテ

$$\|(\lambda-\varepsilon)[p]a\|\leqq\|[p]b\|\leqq\|(\lambda+\varepsilon)[p]a\|$$

故ニ

$$\left|\frac{\|[p]\,b\|}{\|[p]\,a\|}-\lambda\right|<\varepsilon$$

$\lambda=+\infty$ ノ場合モ同様デアル。

定理1ヨリ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス。

$\boxed{\text{定理2}}$ 總テノ *Projector* 〔p〕ニ對シ

$$\|[p]a\| = \|[p]b\|$$

ナレバ

$$|a| = |b|$$

デアル。

2) Bohnenblust ノ結果ハ結局次ノ如キ metric Vector-lattice ノ表現ヲナスコトデアル。即チ

$$|a| \frown |b| = 0 \rightarrow \|a+b\| = (\|a\|^{\alpha} + \|b\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}},$$

ナル metric ヲ有スル metric Vector-lattice デアリマス。

角谷氏ノハ特ニ $\alpha = 1$ ノ場合デアリマス。定理1ニヨリマスト

$$\lim_{[p] \rightarrow \mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|} = \left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right) = \left|\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right)\right|$$

従ッテ

$$\lim_{[p] \rightarrow \mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|^{\alpha}}{\|[p]a\|^{\alpha}} = \left|\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right)\right|^{\alpha}$$

従ッテ $[p][q] = 0$ ナレバ

$$\|[p+q]a\|^{\alpha} = \|[p]a\|^{\alpha} + \|[q]a\|^{2}$$

ナルニヨリ，容易ニ

$$\|[a]b\|^{\alpha} = \int_{[a]} \left|\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right)\right|^{\alpha} \|d\mathfrak{p}\, a\|^{\alpha}$$

ナルコトガ解ル。此処ニ積分ハ Riemann ノ意味デス。即チ

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}_i \right) \right|^{\alpha} \| [p_i] a \|^{\alpha}$$

$$\mathfrak{p}_i \ni [p_i]. \quad [p_i][p_j] = 0,$$

$$[a] = [p_1] + \cdots\cdots + [p_n]$$

デ、又上ノ積分ノ存在モ簡単ニ証明サレル。

故ニ

$$\| [a] b \| = \left(\int_{[a]} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p} \right) \right|^{\alpha} \| d\mathfrak{p}\, a \|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

今 $\mathfrak{M}$ ヨリ互ニ orthogonal ナ complete system ヲ $\{a_\alpha\}$ トスル。即チ a_α ノ総テニ orthogonal ナ element ハ 0 トスル。

$\{a_\alpha\}$ ノ存在ハ transfinite Induction デ明カデアル。

空間 $\mathfrak{J}$ ノ中デ近傍 $[a_\alpha]$ 間ニアル点ノ全体ヲ $\mathfrak{J}'$ トスレバ

$$\varphi_b(\mathfrak{p}) = \left(\frac{b}{|a_\alpha|}, \mathfrak{p} \right) \qquad \mathfrak{p} \ni [a_\alpha]$$

トシテ、$\mathfrak{J}'$ ニ於ケル連續函数 $\varphi_b(\mathfrak{p})$ ニテ $\mathfrak{M}$ ノ element b ガ代数的ニ表現サレマス。然カモ

$$\| b \| = \left\{ \sum_{\alpha} \int_{\mathfrak{J}'} \left| \left(\frac{b}{|a_\alpha|}, \mathfrak{p} \right) \right|^{\alpha} \| d\mathfrak{p}\, a_\alpha \|^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

トナル。此処ニ積分ハ Riemann ノ意味デアルガ、勿論 Lebesgue ノ意味ニ拡張デキマス。

3) 次ニ $\alpha = \infty$ ノ場合ヲ考ヘル。即チ

$$|a| \frown |b| = 0 \longrightarrow \|a+b\| = Max(\|a\|, \|b\|)$$

ナル metric vector-lattice ヲ考ヘル。$a>0$ ニ對シ

$$\underset{[p] \in \mathfrak{p}}{g.l.b.} \|[p]a\| = \varphi_a(\mathfrak{p})$$

ト置クト、$\varphi_a(\mathfrak{p})$ ガ $\mathfrak{J}$ ニテ連續ナ函數ナルコトガ容易ニ解ル。又

$$\lim_{[p] \to \mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|} = \frac{\varphi_b(\mathfrak{p})}{\varphi_a(\mathfrak{p})} = \left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right)$$

ヨリ、$a>0$ ニ對シ

$$\|a\| = \underset{\mathfrak{p}}{Max}\ \varphi_a(\mathfrak{p})$$

ナルコトガ知ラレル。又一般ノ a ニ對シテハ $\varphi_{a_+}(\mathfrak{p}) - \varphi_{a_-}(\mathfrak{p})$ ヲ對應サセレバヨイ。上ノ式カラ $\varphi_a(\mathfrak{p})$ デ a ガ代數的ニ表現サレテヰルコトガ解リマス。